RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota II del Socio CARLO SOMIGLIANA.

II.

DETERMINAZIONE DEL PROFILO.

Il problema che noi dobbiamo proporci è quello di dedurre la curva del profilo del canale glaciale, supponendo che siano noti, come dati d'osservazione, i valori della funzione u nella porzione dell'asse delle y che è compresa fra i bordi del canale. Noi supporremo che questa porzione dell'asse delle y sia limitata dai valori $y = L_0$ ed $y = L_1$.

Ora noi possiamo dimostrare che la funzione u è completamente determinata dai suoi valori u_0 sull'asse delle y fra L_0 ed L_1, valori che possiamo supporre espressi mediante una funzione $\varphi(y)$, cioè

$$u_0 = \varphi(y) \tag{7}$$

e dai valori della sua derivata normale lungo lo stesso intervallo, valori che nel nostro caso sono pure noti, in quanto sono tutti nulli per la prima delle condizioni (6). Supponiamo, per maggiore generalità, che si abbia

$$\text{per } z = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \psi(y). \tag{8}$$

Siccome la u deve essere regolare nel campo da considerarsi, essa nell'in-

torno di un punto qualunque dell'asse delle y, che possiamo senz'altro supporre sia il punto $y = 0$ $z = 0$, ammetterà uno sviluppo della forma solita

$$u(y\,,\,z) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \cdots$$

Ora si può subito dimostrare che tutti i coefficienti di questo sviluppo si possono determinare mediante le (7) (8) e la equazione (5) a cui la u deve soddisfare. Da queste equazioni abbiamo infatti con semplici derivazioni

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \varphi^{(1)}(y) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \psi(y)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = \varphi^{(2)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\ \partial z}\right)_0 = \psi^{(1)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = -\varphi^{(2)}(y) - \mathrm{H}$$

ove gli apici indicano derivazioni, ed H è la costante $\varrho g \operatorname{sen}\alpha : \mu$. In modo analogo si possono calcolare i valori di tutte le altre derivate di ordine superiore, per $z = 0$. Si trova

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_0 = \varphi^{(n)}(y) \qquad \left(\frac{\partial^{(m+2n)} u}{\partial y^m\ \partial z^{2n}}\right)_0 = (-1)^n \varphi^{(m+2n)}(y)$$

$$\left(\frac{\partial^{(m+2n+1)} u}{\partial y^m\ \partial z^{2n+1}}\right)_0 = (-1)^n \psi^{(m+2n)}(y).$$

L'unicità della funzione u che soddisfa alle condizioni stabilite è così dimostrata, poichè dallo sviluppo della funzione in un punto del campo, noi possiamo coi metodi di prolungamento delle funzioni armoniche dedurne lo sviluppo in un altro qualunque. La u differisce infatti da una funzione armonica unicamente per il termine $-\frac{1}{2}\mathrm{H}z^2$, che è nullo, insieme alla sua derivata normale, sull'asse delle y.

La funzione $\varphi(y)$ per le ipotesi fatte avrà sempre valori nulli all'estremo dell'intervallo, cioè per $y = \mathrm{L}_0\,,\,\mathrm{L}_1$. In questi punti è nulla anche la u; perciò la curva rappresentata nel piano yz dall'equazione

$$u(y\,,\,z) = 0$$

darà senz'altro l'equazione del profilo del canale a cagione della seconda delle equazioni (6), tutte le volte che la funzione u, in base ai dati superficiali, si potrà effettivamente costruire.

Ora questa funzione si può sempre costruire colla massima facilità mediante la funzione $\varphi(y)$ e la funzione $\Psi(y)$, quando questa non sia nulla, o non si voglia supporla tale per tener conto di qualche altro elemento.

Se $\psi(y) = 0$ basterà porre, ricordando la forma dell'integrale generale dell'equazione di Laplace con due variabili,

$$u(y, z) = \frac{1}{2}\varphi(y + iz) + \frac{1}{2}\varphi(y - iz) - \frac{1}{2}\mathrm{H}z^2$$

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\mu}\varrho g \operatorname{sen}\alpha \qquad i = \sqrt{-1}\,.$$

La derivata rispetto a z di questa espressione si annulla per $z = 0$.

Quando $\psi(y)$ non sia ovunque nulla basterà aggiungere alla espressione precedente la funzione

$$-\frac{i}{2}\Psi(y + iz) + \frac{i}{2}\Psi(y - iz) \quad \text{ove} \quad \Psi(y) = \int^{y} \psi(y)\, dy$$

che sarà pure reale, essendo, come dobbiamo supporre, $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ reali.

L'equazione del profilo della sezione sarà quindi in generale

$$\varphi(y + iz) + \varphi(y - iz) - \frac{z^2}{\mu}\varrho g \operatorname{sen}\alpha = 2u_f \tag{9}$$

indicando con u_f quella costante, sempre assai piccola che può rappresentare la velocità media di scorrimento del ghiacciaio sul fondo, e che generalmente, come già si disse, può senza errore sensibile supporsi nulla.

Se nelle equazioni precedenti che determinano u sostituiamo all'immaginario i una costante reale a, e supponiamo che la variabile z rappresenti un tempo, esse vengono a coincidere, supponendo $\mathrm{H} = 0$, coll'equazione differenziale della corda vibrante, e cogli integrali classici di D'Alembert per questa equazione. Le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ corrispondono allora a quelle che dànno gli spostamenti e le velocità iniziali dei punti della corda. Questa analogia dà ragione della generalità della soluzione, che abbiamo potuto costruire.

Praticamente la funzione $\varphi(y)$ non sarà altro che una espressione di interpolazione fra una serie discreta di valori per la velocità superficiale, in punti determinati dall'asse delle sezioni, nei quali sarà stata determinata la velocità mediante l'osservazione. Essà avrà ad es. la forma

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y)\, u_i$$

ove λ_i sono polinomi interi di grado n, determinati dalla formola d'interpolazione di Lagrange, $u_1, u_2, \ldots$ i valori della velocità nei punti di ascissa $y_1, y_2, \ldots, y_n$; cioè sarà

$$\lambda_i(y) = \frac{(y - y_1)\ldots(y - y_{i-1})(y - y_{i+1})\ldots(y - y_n)}{(y_i - y_2)\ldots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\ldots(y_i - y_n)}\,.$$

Si comprende perciò come aumentando il numero dei punti, nei quali si determina la velocità superficiale, si potrà raggiungere tutta l'approssimazione che si desidera nella rappresentazione della curva che rappresenta tale velocità, e quindi anche di quella che rappresenta il profilo della sezione.

In questo caso la funzione u sarà composta del termine $\frac{1}{2}Hz^2$, e di una funzione lineare di un certo numero di armoniche piane $U_1, U_2, \ldots$, di ordine pari rispetto a z, la cui forma generale, come è notissimo, è

$$U_n = \frac{1}{2}(y + iz)^n + \frac{1}{2}(y - iz)^n.$$

La soluzione così trovata del problema della determinazione del profilo della sezione è suscettibile di una generalizzazione, che può avere interesse nei casi in cui la linea libera superficiale si scosta da una linea retta. Effettivamente, se si osservano le sezioni ottenute dai rilievi, questa linea è generalmente convessa verso l'alto nella regione mediana. Volendo tener conto di questa particolarità, immaginiamo di sostituire alla retta dell'asse delle y, una circonferenza col centro in un punto qualunque, opportunamente scelto del piano yz, e prendiamo un sistema di coordinate polari ϱ, θ col polo in questo punto.

La funzione u, considerata come dipendente dalle nuove variabili, soddisferà all'equazione

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + H = 0$$

mentre sulla circonferenza superficiale dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial\varrho} = 0 \quad \text{cioè per} \quad \varrho = R,$$

se R è il raggio di questa circonferenza, ed inoltre

$$u = \varphi(\theta)$$

se $\varphi(\theta)$ è la funzione che dà la velocità superficiale in questo caso. Noi possiamo costruire una funzione v di ϱ, la quale soddisfa all'equazione

$$\Delta_2 v(\varrho) + H = 0$$

ed inoltre sulla circonferenza $\varrho = R$ alle condizioni

$$v(R) = 0 \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_R = 0.$$

Basta porre

$$-v(\varrho) = A\varrho^2 + B\lg\varrho + C$$

con

$$A = \frac{1}{4}H \qquad B = -\frac{1}{2}R^2H \qquad C = -\frac{1}{4}HR^2 + \frac{1}{2}HR^2\lg R.$$

Questa funzione ha lo stesso ufficio della funzione $\frac{1}{2} z^2 H$ del caso precedente. Se poniamo

$$u = U(\varrho , \theta) + v(\varrho)$$

avremo per U le equazioni

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

ed inoltre

$$U(R , \theta) = \varphi(\theta) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \right)_R = 0 .$$

Per considerazioni ben note avremo allora subito per questa nuova funzione l'espressione

$$U(\varrho , \theta) = \frac{1}{2} \varphi \left(\theta + i \lg \frac{\varrho}{R} \right) + \frac{1}{2} \varphi \left(\theta - i \lg \frac{\varrho}{R} \right)$$

ed avremo risoluto il problema della determinazione del profilo del fondo in modo analogo al caso precedente, quando la linea superficiale limitante superiormente la sezione del ghiacciaio sia una circonferenza, prendendo come equazione del profilo:

$$U(\varrho , \theta) + v(\varrho) = 0 .$$

Questi procedimenti pel rilievo del fondo presuppongono naturalmente, per poter essere praticamente applicati, la conoscenza della costante H ossia del rapporto $\varrho g \operatorname{sen} \alpha : \mu$. Le costanti ϱ , g possono ritenersi note, l'angolo α si potrà pure dedurre con sufficiente approssimazione dai rilievi della superficie del ghiacciaio. L'elemento più incerto è il coefficiente d'attrito μ. Il sig. Weinberg (loc. cit.) ne ha tentato una determinazione diretta sperimentando sul ghiaccio del Hintereisferner ed una teorica indiretta, approfittando dei rilievi fatti sullo stesso ghiacciaio. I risultati ottenuti dànno delle medie concordanti, anzi la loro piccolissima differenza non si può attribuire che ad una accidentalità. Questi valori ad ogni modo sono

$$\mu_{teor.} = (1,67 \mp 0,95)\ 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}}$$

$$\mu_{sper.} = (1,74 \mp 1,10)\ 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}} .$$

Ci occuperemo in seguito della possibilità di calcolare il valore di μ mediante la teoria stessa che abbiamo stabilita, approfittando di alcuni casi, in cui si conosce il rilievo esatto del fondo e la velocità superficiale. È ora interessante di esaminare quale sia la forma analitica ed il significato geometrico dei risultati a cui si giunge nei casi più semplici, ammettendo cioè noti soltanto alcuni elementi della velocità superficiale. Naturalmente per un confronto colle misure di profondità, che necessariamente sono fatte verticalmente, si dovrà tener conto che la direzione delle ordinate z è inclinata di un angolo α sulla verticale.

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VI del Corrispondente Francesco Severi.

12. Quando la curva $\bar{C}$, considerata alla fine della Nota V [1], sia una curva qualunque del sistema continuo Σ cui appartiene C, e non più una curva vicinissima, la somma $\bar{U}$ relativa a $\bar{C}$ risulterà perfettamente definita, a partire dalla somma U relativa a C, tutte le volte che, entro Σ, sia fissato il cammino ∞^1 con cui si va da C a $\bar{C}$. Invero, i cammini d'integrazione per andare da P ai punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ ove $\bar{C}$ sega un piano $y = \text{cost.}$, si otterranno aggiungendo ai cammini $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ quelli descritti dai punti $x_1, \ldots, x_n$ di C quando C va dalla posizione iniziale a $\bar{C}$, seguendo, entro Σ, l'assegnato cammino ∞^1. Ma l'incremento costante subìto da U nel passaggio da C a $\bar{C}$ dipenderà generalmente dal cammino ∞^1 scelto entro Σ. La differenza fra due qualunque di questi incrementi sarà però un periodo di u. Sicchè possiamo dire che:

Se C, $\bar{C}$ *son due curve appartenenti su* F *al medesimo sistema continuo, le somme* U, $\bar{U}$ *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* C, $\bar{C}$ *segano un piano* $y = \text{cost.}$, *considerate come funzioni del parametro* y, *differiscono per una costante additiva e per un periodo di* (24). *Quando* φ *sia un'aggiunta d'ordine* $m - 3$, *la costante additiva manca.*

Osservazione 1ª. — Se $\varphi = 0$ fosse un'aggiunta d'ordine $m - 3 + l$ $(l \geq 1)$, passante con moltiplicità l per la retta impropria dei piani $y = \text{cost.}$, si perverrebbe analogamente alla conclusione che $U - \bar{U}$ ammette in $y = \infty$ un polo d'ordine $l - 1$, mentre è olomorfa per ogni altro valore di y. Pertanto $U - \bar{U}$ *sarebbe un polinomio d'ordine* $l - 1$ in y.

Osservazione 2ª. — Se le curve C, $\bar{C}$ staccano sopra una sezione piana A, fissata nel fascio $y = \text{cost.}$, due gruppi equivalenti di punti, il valore costante, a meno dei periodi, assunto dalla differenza $U - \bar{U}$, s'annulla per ogni y, perchè ciò accade in corrispondenza a quella particolare A. Ne deriva che le C, $\bar{C}$ staccano gruppi equivalenti sopra ogni curva del fascio; e poichè trattasi di curve dello stesso ordine ed il fascio $|A|$ $(y = \text{cost.})$ è di grado > 0 e privo di curve spezzate, le C, $\bar{C}$ risultano equivalenti

[1] Questi Rendiconti, pag. 296.

(Severi, Annali di Mat., 1905). Dunque *per constatare che due curve* C, $\bar{C}$ *dello stesso sistema continuo son equivalenti, non occorre verificare che esse staccano gruppi equivalenti su tutte le curve di un fascio lineare* $|A|$, *di grado* > 0, *privo di curve spezzate, bastando per ciò ch'esse stacchino gruppi equivalenti sopra una particolare* A.

13. D'ora innanzi indicheremo con $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_q = 0$ quelle q aggiunte d'ordine $m-2$ ad F, passanti per la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$, che corrispondono ai q integrali semplici di 1ª specie $I_1, \ldots, I_q$ di F. Il loro sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0$ non possiede alcun valore critico, perchè i q integrali I sono indipendenti sopra ogni sezione piana $y = \text{cost.}$

Denoteremo inoltre con $\varphi_{q+1} = 0, \ldots, \varphi_p = 0$ $p-q$ generiche aggiunte indipendenti d'ordine $m-3$ ad F, così che gl'integrali:

$$I_h = \int \frac{\varphi_h(x, y, z)}{f'_z}\, dx, \ (h = 1, \ldots, q);$$

$$u_{q+j} = \int \frac{\varphi_{q+j}(x, y, z)}{f'_z}\, dx, \ (j = 1, \ldots, p-q),$$

formeranno un sistema lineare non possedente altri valori critici che $y = \infty$ e i valori critici del sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0$ (n. 6).

Allora le somme $U_1, \ldots, U_q$ fornite dagl'integrali $I_1, \ldots, I_q$ nei punti del gruppo (C, A), ove A denoti una prefissata sezione $y = \text{cost.}$, in generale varieranno, col variare di C in un sistema continuo, ed assumeranno anzi $\infty^{q'}$ gruppi di valori, se C fa parte di un sistema continuo completo costituito da $\infty^{q'}$ sistemi lineari distinti ($q' \leq q$). Invece le somme $U_{q+1}, \ldots, U_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ rimarranno sempre costanti, comunque varî C entro al proprio sistema continuo. Enuncieremo il risultato sotto la seguente forma invariantiva:

Sulla superficie F *sia* C *una curva variabile in un sistema continuo completo, costituito da* $\infty^{q'}$ *sistemi lineari* ($q' \leq q$) *ed* A *una curva irriducibile di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* > 0. *Allora le* q *somme fornite dagl'integrali semplici di* 1ª *specie di* F *nei punti del gruppo* (C, A), *al variare continuo di* C, *assumono* $\infty^{q'}$ *gruppi distinti di valori; mentre le somme fornite dai* $p-q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie indipendenti, individuati su* A *dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *restano costanti.*

Quando sia $q' < q$ (ma $q' > 0$), poichè la varietà $V_{q'}$ i cui punti rappresentano i sistemi lineari del nostro sistema continuo, è ancora, come nel caso $q' = q$, una varietà di Picard, dotata soltanto di q' integrali semplici di 1ª specie (Severi, questi Rendiconti, 1916, pag. 559), così le q somme fornite dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, in corrispondenza alla C

del sistema, riduconsi a q' linearmente indipendenti. Vi sono cioè $q - q'$ integrali di F, che dànno somme costanti nei gruppi (C, A). In tal caso F possiede q' integrali semplici di 1ª specie riducibili, con $2q'$ periodi ridotti (ibidem, pag. 560).

14. Si presenta ora la seguente importante questione: Che cosa si può dire di due curve C_1, C_2, le quali stacchino sulla curva A, di cui sopra, due gruppi di punti (C_1, A), (C_2, A) nei quali gl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ dieno somme congrue rispetto ai $2p$ periodi di tali integrali?

Occorre anzitutto avvertire che, quando gl'integrali semplici di 1ª specie di F si considerano come integrali abeliani (riducibili) inerenti alla curva A, la congruenza fra le somme dei valori degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) può considerarsi da due punti di vista:

1) si può richieder che le somme stesse siano a due a due congruenti, assumendosi a moduli delle congruenze i $2q$ periodi primitivi (ridotti) degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$;

2) oppure si può richiedere che quelle somme sieno congruenti rispetto ai $2p$ periodi primitivi (non ridotti) degli integrali abeliani $I_1, \ldots, I_q$.

Evidentemente il secondo punto di vista è più restrittivo del primo, perchè due quantità che sieno congrue nel senso 2) lo sono anche nel senso 1); ma non, necessariamente, viceversa.

Supposto che le q coppie di somme sieno congrue nel senso 1), ho provato altrove (Rendiconti di Palermo, 1906), che, se le C_1, C_2 appartengono ad uno stesso sistema continuo, esiste un intero d tale che le due curve dC_1, dC_2 son equivalenti: $dC_1 \equiv dC_2$.

Se invece le q suddette coppie di somme son congrue nel senso 2), e le C_1, C_2 appartengono sempre ad uno stesso sistema continuo, siamo ora in grado di affermare che sarà addirittura $C_1 \equiv C_2$. Infatti, appunto perchè C_1, C_2 appartengono allo stesso sistema continuo, le somme fornite dagli integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) son congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali (n. 12); e quindi, se è soddisfatta l'ipotesi 2), i due gruppi (C_1, A), (C_2, A), in virtù dell'ordinario teorema d'Abel sulle curve, son equivalenti; donde segue l'equivalenza delle C_1, C_2, in forza dell'osserv. 2ª del n. 12. Si può pertanto enunciare:

Sopra una superficie F *abbiansi due curve* C_1, C_2, *di uno stesso sistema continuo, che seghino sopra una terza curva irriducibile* A, *di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* > 0, *due gruppi di punti* (C_1, A), (C_2, A) *nei quali gl'integrali semplici di* 1ª *specie di* F, $I_1, \ldots, I_q$, *dieno somme eguali, a meno di multipli interi dei* $2q$ *periodi primitivi di* $I_1, \ldots, I_q$. *Esiste allora un intero positivo* d *tale che le curve* dC_1, dC_2 *son equivalenti. Ma se le somme stesse sono anche eguali a meno di multipli interi dei* $2p$ *periodi di* $I, \ldots I_q$, *considerati come integrali abeliani di* A, *allora le* C_1, C_2 *sono addirittura equivalenti.*

Osservazione. — Poichè d è il minimo comune multiplo dei *divisori* $d_1, \dots, d_q$ *della varietà picardiana* V_q *annessa ad* F (Severi, Rend. di Palermo, 1906), quando questa abbia i divisori eguali ad 1, risulta $d = 1$, ed allora i due modi 1) e 2) di considerare le congruenze delle solite q somme non sono in realtà diversi.

15. Innanzi di venir a parlare della questione fondamentale sollevata al principio del n. prec., convien richiamare taluni concetti, relativi ai sistemi continui di curve tracciati sulla superficie F, da me posti in precedenti lavori.

Un sistema continuo di curve algebriche C su F è sempre contenuto in un sistema algebrico $\{C\}$. Se $\{C\}$ è irriducibile, come totalità di curve, e non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, esso dicesi *completo*. Se si considerano i sistemi lineari individuati dalle C di un sistema completo, mentre accade che il generico di tali sistemi sta tutto in $\{C\}$, può darsi, per qualche particolare posizione, che il sistema $|C|$ esorbiti da $\{C\}$. Tuttavia la varietà dei sistemi lineari $|C|$ continua anche in tal caso ad esser irriducibile, prendendone come elementi i sistemi lineari. La s'indica con (C). E anche per una siffatta varietà (C) si può parlare di completezza, quando essa non sia contenuta in una varietà più ampia di sistemi lineari dello stesso ordine.

Due curve C_1, C_2 di F diconsi *algebricamente equivalenti*, e si scrive $C_1 \equiv C_2$, quando i sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$ appartengono ad una medesima varietà completa (C) di sistemi lineari dello stesso ordine; oppure quando si può determinare una curva D tale che $|D + C_1|$, $|D + C_2|$ appartengano ad una medesima varietà completa $(D + C)$. Si dimostra che tale definizione equivale a ciò: che le C_1, C_2 posson considerarsi come resti di una medesima C, rispetto ad un sistema irriducibile *di curve*.

Si dirà anche in tal caso che *la curva virtuale* (Severi, Rendiconti Ist. Lombardo, 1905) $C_1 - C_2$ *è algebricamente equivalente alla curva zero:* $C_1 - C_2 \equiv 0$. Infine si dirà che più curve $C_1, \dots, C_t$ sono *algebricamente dipendenti* secondo i numeri interi $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ (dei quali alcuni positivi ed altri negativi), quando la curva virtuale $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t$ è algebricamente equivalente alla curva zero.

Ciò premesso, supponiamo che le due curve C_1, C_2 dello stesso ordine, ma delle quali non sappiamo a priori che appartengono allo stesso sistema continuo, soddisfacciano a questa condizione: che le somme $c_{q+1}, \dots, c_p$; $c'_{q+1}, \dots, c'_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A) sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali; e che ciò si verifichi non soltanto per una posizione particolare di A, ma al variare di A nel proprio fascio. Consideriamo dapprima il caso generale in cui una delle curve date, p. es. C_1, sia atta a definire un sistema continuo (C_1), costituito da ∞^q sistemi lineari; e sieno $c_1, \dots, c_q$; $c'_1, \dots, c'_q$ i valori delle somme degl'integrali $I_1, \dots, I_q$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A).

Al variare di C_1, o meglio del sistema lineare $|C_1|$ entro (C_1), le $c_1, \ldots, c_q$ assumono ∞^q gruppi di valori, incongrui, non soltanto dal punto di vista 1) del n. 14, ma anche dal punto di vista 2), perchè due gruppi di valori di $c_1, \ldots, c_q$, congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti degl'integrali abeliani $I_1, \ldots, I_q$, non posson provenire, a cagione del teorema del n. prec., che da curve C_1 equivalenti fra loro. Vi sarà pertanto in (C_1) una curva $\overline{C}_1$ per la quale le dette somme assumeranno, a meno di multipli interi dei suddetti $2p$ periodi, i valori $c'_1, \ldots, c'_q$.

Quanto alle somme degl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ nei punti del gruppo $(\overline{C}_1, A)$ esse saranno congrue a $c_{q+1}, \ldots, c_p$ (n. 14) e quindi a $c'_{q+1}, \ldots, c'_p$, le congruenze avendo anche qui luogo rispetto ai $2p$ periodi di $u_{q+1}, \ldots, u_p$.

Ciò significa che sulla A i due gruppi $(\overline{C}_1, A)$, (C_2, A) son equivalenti fra loro e quindi che lo sono pure le curve $\overline{C}_1$, C_2, le quali staccano gruppi equivalenti sopra *ogni* curva A. Ricordando che (C_1) è individuato da uno qualunque $|C_1|$ oppure $|\overline{C}_1|$ dei suoi sistemi lineari, appunto perchè consta di ∞^q sistemi lineari distinti (Severi, questi Rend., 1916, pag. 561), ne consegue che C_2 appartiene a (C_1), cioè che $C_1 \equiv C_2$.

Consideriamo adesso il caso eccezionale in cui nè C_1, nè C_2 stanno in sistemi continui di ∞^q sistemi lineari. Assumiamo allora un sistema (D), formato da ∞^q sistemi lineari, e, fissata una curva D di questo sistema, consideriamo le curve $D + C_1$, $D + C_2$, ciascuna delle quali individua un sistema $(D + C_1)$, $(D + C_2)$, formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Le $D + C_1$, $D + C_2$ verifican le ipotesi cui prima soddisfacevano le C_1, C_2, e si può pertanto affermare che i due sistemi $(D + C_1)$, $(D + C_2)$ coincidono e quindi, anche in tal caso, $C_1 \equiv C_2$. Riassumendo possiamo enunciare:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve C_1, C_2 *dello stesso ordine, tracciate sulla superficie* F, *siano algebricamente equivalenti, è che i* $p - q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie individuati sopra una curva irriducibile* A, *di genere* p, *variabile in un fascio lineare di grado* > 0, *privo di curve spezzate, dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *dieno somme congrue nei gruppi* (C_1, A), (C_2, A).

Osservazione. — I $p - q$ integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ formano sulla curva A un sistema regolare d'integrali abeliani di 1ª specie riducibili, avente $2(p - q)$ periodi ridotti, il quale è complementare del sistema regolare di q integrali riducibili staccato su A dagl'integrali di 1ª specie di F.

Si possono perciò considerare anche qui le congruenze delle somme fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$, nei gruppi (C_1, A), (C_2, A), dai due punti di vista indicati nel n. 14. E cioè si può porre o la condizione che le dette somme sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi non ridotti o che lo sieno rispetto ai $2(p - q)$ periodi primitivi ridotti. Nel primo caso si cade nell'ipotesi del teorema ultimamente dimostrato; nel secondo si potrà determinare un intero λ tale che i multipli secondo λ delle somme suddette sieno congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti. Ne seguirà la equivalenza algebrica delle due curve $\lambda C_1, \lambda C_2$.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

VII.

Gruppo della Crocetta.

Raggruppo in più brevi descrizioni i cenni di varie località vicinissime fra loro, calcaree e silicee, contenenti residui di una o al più due specie di *Hexactinellidae*, probabilmente una appartenente alle *Hexasterosa*, l'altra alle *Lichniscosa*, se pur la differenza dell'avere o no Lychnische non dipende dal semplice modo di conservazione. Gli uni strati e gli altri stanno nella parte media della formazione che attribuisco all'Eocene superiore, entro il sinclinale compresso e rovesciato fra l'anticlinale regolare di Granito del Sansobbia e quello localmente rovesciato e spostato del Granito di Sella. Quegli strati alternano regolarmente con lenti di Serpentino, di Diabase, di Gabbro e di tufi e con sottili calcari più puri diventati parzialmente marmorei che Rovereto attribuì al Trias superiore.

In quella zona, a Montenotte Superiore, Rovereto e Parona trovarono e descrissero Radiolarie nei Diaspri ritenuti prima Permiani, poi Giuresi; questo ritrovamento indusse me a fare per quei luoghi minuziosa ricerca di altri eventuali fossili.

Palazzo Doria.

A *Lychniscosa* appartiene una specie trovata nella precedente zona, sotto Palazzo Doria, in un Calcare siliceo-quarzoso, frammentizio, simile a quello che nell'Appennino toscano chiamano Calcare screziato. Gli straterelli sono separati da veli di Sericite, raramente Clorite. Al polariscopio si scorgono appunto Calcite predominante, Opale, Quarzo, Sericite, Clorite, Apatite, Rutilo, Magnetite, Pirite, Limonite, rarissimi frammentini di Feldspato, oltre a particelle carboniose. Vene di Calcite in grossi cristalli traversano la roccia. Il reticolato dictyonale è visibile già all'esterno, come pure dopo leggera acidulazione e nelle sezioni, tanto nella parte calcitica, quanto in quella silicea.

Particelle carboniose che, come in tutti i casi precedenti, ritengo con Heckel residuo della parte organica, rivestono ordinariamente le parti quarzose del reticolo, ma in particelle isolate si trovano pure entro i cristallini del Quarzo, che perciò si potrebbe dire *affumicato*. La parte carboniosa è quasi sempre accompagnata da quella limonitica.

Sulle superfici lustrate e pulimentate il Quarzo bianco apparisce in

mezzo al Calcare più scuro come arabeschi o caratteri ebraici, ma attentamente osservato lascia trasparire l'intreccio.

Osservando all'ingrosso le sezioni più sottili non acidulate si vedono macchie circolari di Quarzo alquanto più scure in esteso ambiente calcitico, piccole macchie nere carboniose e pezze giallastre per Limonite e Clorite.

Soggettando agli acidi una superficie spianata, rimane abbondante il reticolo più grossolano convertito in moltissima parte nei soliti cristallini e fioriture già descritti di Quarzo, che liberato dai suoi rivestimenti è limpido e ialino, perciò purissimo, con inclusioni acquee e carboniose, fioriture le quali lasciano appena sospettare l'intreccio Questo vi è perciò poco distinto e lascia trasparire al più le direzioni dei Canali acquiferi normali alla stratificazione.

In alcuni tratti, come alla Crocetta, il Quarzo apparisce invece in punti bianchi nella parte centrale delle maglie convertite in Calcite.

Quando la dissoluzione dei frammenti è completa rimangono cristallini di Quarzo ed un tenuissimo residuo carbonioso e d'idrossido di ferro che sta a lungo sospeso nel liquido.

L'intreccio si conservò meglio in alcune delle parti piritose e limonitiche ed in quelle carboniose: a volte invece la Limonite occupa la parte centrale delle maglie silicee e calcitiche. Limonite pseudomorfa o a dirittura Pirite intatta occupano talora il tubo dei Canali maggiori.

Esso intreccio, diretto in senso longitudinale, radiale e circolare, è più regolare in certi tratti, forse dalla parte esterna, ma nell'insieme è molto irregolare, prevalentemente quadrato o parallelogrammo, ma pur poligonale e triangolare per riduzione di uno dei bracci delle *Hexactiniae*. È relativamente più rado, cioè a maglie meno minute che altrove, e come negli esemplari di Campo Ligure. L'intreccio maggiore è fornito di Lychnische visibili anche a traverso il velo della Sericite la quale sembrerebbe talora avere sostituito il calcare: il canale assile è spesso visibile. Nell'interno delle maglie maggiori è talora l'intreccio microsclerico visibile specialmente dove domina la parte limonitica. Si nota qualche piastrella con maglie rotonde formate dalla espansione delle Spicole, dermale o basidictionale.

Piccole *ostia* di Epirhize in serie parallele trasversalmente allungate o leggermente oblique sulla costa degli strati stanno entro un intreccio hexactinico formato a losanga: *ostia* puntiformi, circolari probabilmente di Aporhize sono a forma di tubi con tessuto periferico radiale.

Fra i parenchimali si possono indicare *Hexactiniae* isolate, talune frammentizie forse *Pentactiniae* dermali, *Tetractiniae*, non *Scopulae* o *Clavulae*.

Fra le famiglie degli Spongiari fossili, parecchie non presentarono finora i Parenchimali fossili e sono rimaste *incertae sedis*. La nostra specie potrebbe appartenere alle *Inermia* o forse alle *Uncinataria*. Per la forma assai irregolare relativamente poco fitta dell'intreccio, e per le espansioni di varie Spicole, somiglierebbe alle *Leptophragmidae* della Creta le quali sono *Hexasterosa inermia*. Bensì per le Lychnische, per i canali contigui con

periferia radiata si ravvicinerebbe alle famiglie di *Lychniscosa*, *Lyringium* e *Ventriculites* Cretacee.

Fra gli esemplari descritti vi sarebbe affinità con quelli di San Martino, che sono più antichi; ma questi hanno le Lychnische, a quanto pare, spinose, e le Aporhize, sebbene piccole, pur di dimensioni maggiori.

Sono inclusi isolati *Amphistrongyli* monaxonici e qualche *sigma* di *Rhizomorina*. Talora compaiono pure Rhabdaeloni isolati di *Megarhizidae* visibili anche sulle superfici semplicemente spianate; sono lisci, monocrepidi, con canale assile, di non piccole dimensioni, più o meno incurvati, con scarse ramificazioni non uniformi, liscie, per lo più brevi e con zygosi semplicissimi, sciolti fra loro. Le *Megarhizidae* sono solo del Giura e della Creta, non viventi.

Dal punto di vista del metamorfismo delle rocce locali è meritevole di nota la permanenza delle particelle carboniose, ritenute residuo della parte organica, perchè i metamorfismi ebbero luogo a profondità lungi dal contatto dell'aria.

Verso Rio Gea.

Al bivio sotto Palazzo Doria verso il Rio Gea nella zona degli schisti plumbei è uno schisto or quarzoso più chiaro or ferruginoso più scuro, di solito bene stratificato; ma in certi punti, soggetto a spostamenti, è diventato una specie di Galestro verdognolo con noccioletti di Quarzo. Contiene inoltre Sericite, rara Clorite, Pirite, Limonite, Rutilo, non Calcite. Contiene tracce di *Hexasterosa* frammentizia, vicina o identica a quella della Crocetta, nel Quarzo, ma specialmente nella parte ferruginosa, non nello schisto.

L'intreccio è regolare, con almeno 3 ordini di *Hexactinine* a maglie quadrate o parallelogramme, o rotondeggianti per espansione delle Spicole alle zygosi. Le Macrosclere sono più irregolari e frammentizie senza Lychnische.

Epirhyze puntiformi contornate da giri d'intreccio a losanga, Aporhize grandi, in serie talora in mezzo ad intreccio radiale di reticolo molto sottile, oppure conformato a stella di molti raggi vuota verso i canali, con le punte dirette all'esterno.

Parallelamente alle superfici appaiono sezioni di canali cechi, talora occupati da Pirite. Oltre *Hexactinine* isolate notansi qualche *Diactinia* e *Pentactinia*.

Potrebbe darsi che le Macrosclere mai spinose e la forma dell'intreccio raggiato intorno alle Aporhize distinguano questa *Hexasterosa* da quella della Crocetta.

Apparisce pure qualche incerta traccia di *Rhizomorina*.

Se non è per qualche piccola differenza nell'intreccio circostante alle Aporhize, ritengo si tratti della medesima *Hexasterosa* della Crocetta.

Nella compagine sono rari Rabdi di *Rhizomorinae* e Tetraxoni di *Tetractinellidae*,

Fisiologia. — *L'Anofele può propagare la malaria anche direttamente?* Nota II del Socio B. Grassi.

Del quesito, se l'Anofele può propagare la malaria direttamente, da me messo innanzi nella seduta del 2 gennaio 1921, come avevo promesso, ho tentato la soluzione con esperimenti diretti.

Finora ne ho fatti tre, che qui brevemente riassumo:

I Esperimento. — Il 10 febbraio 1921 alle ore 16 $^1/_2$ in una camera dell'Ospedale di S. Spirito riscaldata a 26°-27° C. un Anofele punse un malato non chinizzato, nel cui sangue abbondavano i parassiti della quartana per lo più ancora piccoli. Quando era presso a poco a metà del pasto, fu distaccato via e portato subito dietro l'orecchio dello studente B. F. non mai stato malarico. Si attaccò immediatamente ed ha ripreso a succhiare: rimpinzatosi, ha emessa la gocciolina rossa dall'ano e si è staccato.

II Esperimento. — Il 12 febbraio nello stesso ambiente riscaldato si è ripetuto l'esperimento, servendosi di un altro individuo, del pari non chinizzato, che presentava nel sangue piuttosto numerosi i giovani parassiti estivo-autunnali. L'esperimento è stato fatto dalle ore 17 alle ore 18. Due Anofeli, che, dopo di essersi riempiti circa a metà sul collo di questo malarico, artificialmente ne erano stati distaccati, furono applicati al collo della signora M. G. non mai stata malarica: da prima si rifiutavano di attaccarsi, ma dopo un riposo di circa 10 minuti, uno cominciò a succhiare e si riempì fino a emettere la gocciolina rossa; lo stesso fece l'altro, dopo un riposo di circa 25 minuti.

III Esperimento. — Il 14 febbraio l'esperimento si è ripetuto nelle stesse condizioni, soltanto la temperatura dell'ambiente era un po' più bassa (18° C.). Questa volta si prestò per l'esperimento il dott. G. F. non mai stato malarico; si usarono tre Anofeli: tutti e tre si attaccarono e si riattaccarono come nei precedenti esperimenti, questa volta senza alcuna difficoltà. Di questi tre Anofeli due erano magri e vuoti, il terzo magro e gonfio. I primi due una volta riempitisi fecero la gocciolina rossa prima di staccarsi dal dott. G. F.; quello gonfio prima di staccarsene, fece 3 goccioline incolori.

Gli Anofeli, di cui mi sono servito per i suddetti esperimenti, furono il giorno dopo esaminati e tutti si riscontrarono senza sporozoiti nelle ghiandole salivari.

Si può esser sicuri che in tutti e tre questi esperimenti gli Anofeli, prima di pungere la persona sana, avevano succhiato numerosi parassiti in

ambiente a temperatura abbastanza elevata. È perciò lecito di presumere che se fosse stata possibile l'inoculazione diretta, essa si sarebbe verificata; invece essa è mancata, e infatti tutti e tre gli individui sottoposti all'esperimento restarono indenni da malaria.

Io mi propongo di ritentare la prova nella stagione estiva; intanto però mi lusingo che il mio sospetto che la malaria possa propagarsi anche direttamente sia infondato.

Ringrazio il prof. A. Nazari di avere messa a mia disposizione la sua sala a S. Spirito per gli esperimenti qui sopra riferiti.

Fisiologia. — *Contributi alla fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi.* Memoria del Socio Aristide Stefani.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Chimica. — *Sul meccanismo di azione di certi acceleranti della vulcanizzazione della gomma elastica* (1). Nota del Corrisp. G. Bruni e di E. Romani.

Sulla singolare azione accelerante che certe sostanze inorganiche ed organiche esercitano sulla vulcanizzazione della gomma molto si è scritto, specialmente negli ultimi due o tre anni. La prima idea fu che tale azione fosse dovuta al carattere basico delle sostanze impiegate. Infatti le sostanze inorganiche che hanno azione accelerante sono ossidi od idrossidi basici (calce, magnesia, litargirio, soda o potassa caustica). Anche le prime sostanze usate a tale scopo sono ammine o derivati di ammine. Anzi dalla Casa Bayer fu brevettato l'impiego di tutte le basi aventi una costante di dissociazione superiore a 1×10^{-8} (2).

Fu però in seguito provato che la energia delle basi non ha nessuna influenza sulla loro azione accelerante ed anzi che anche sostanze di carattere non basico possono funzionare come acceleranti. Così il sig. Peachey ha dimostrato che i nitrosoderivati aromatici sono acceleranti energici (3), anche quando non contengono radicali basici (nitrosofenolo, nitrosobenzolo) (4).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) D. R. P. 280.198 (1914); Brit. Pat. 12.661 (1914).

(3) Journ. Soc. Chem. Ind. *26*, 321, 424, 950 (1917); Brit. Pat. 101.819 (1917).

(4) Brit. Pat. 146 734 (1920).

A questi corpi si debbono aggiungere gli alchilxantogenati di zinco che sono fra i più potenti acceleranti, come fu notato da Ostromisslenski [1], la cui osservazione sembra essere rimasta sconosciuta a tutti od almeno non è citata in nessuna pubblicazione posteriore.

Riassumendo gli acceleranti finora conosciuti possono essere divisi in tre categorie:

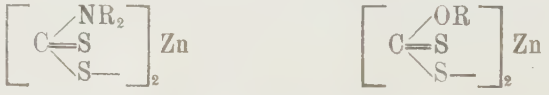
1) sostanze basiche inorganiche od organiche;

2) nitrosoderivati aromatici;

3) sostanze solforate derivanti dalla tiourea o contenenti gli aggruppamenti

In questa ultima categoria rientrano i ditiocarbammati sostituiti. I ditiocarbammati di basi organiche, specialmente secondarie, come dimetilammina e piperidina, furono brevettati dalla Casa Bayer [2], e da essa introdotti in commercio. Nel brevetto Bayer però questi composti si considerano solo come una combinazione per introdurre nella miscela una base liquida e volatile sotto una forma solida e non volatile, come è detto nel testo del brevetto medesimo; si ritiene quindi che essi nella vulcanizzazione liberino la base e che sia questa che agisce.

Che questo modo di concepire la loro funzione sia errato fu dimostrato da noi colla scoperta che l'attività di tali acceleranti è di gran lunga aumentata se ai ditiocarbammati delle basi amminiche si sostituiscono i ditiocarbammati di certi metalli e specialmente di zinco. Che in tali composti la parte attiva della molecola non sia quella basica, ma quella solforata, risulta fra altro dalla perfetta analogia di costituzione fra questi sali e i xantogenati di zinco trovati da Ostromisslenski:



Fu perciò da uno di noi (Bruni) brevettato l'uso degli alchilditiocarbammati metallici come acceleranti [3].

Come acceleranti di maggiore o minore potenza possono poi funzionare derivati di sostituzione della tiourea, p. es. la monofenil- e la difeniltiourea od altri. Anche la loro azione è però grandemente aumentata dalla presenza di ossido di zinco.

[1] Giorn. Soc. Fis. Chim. Russa (1917).

[2] D. R. P. 266.619 (1912), 269.512 (1913); Brit. Pat. 11.615 (1913).

[3] Brev. Ital., nn. 173.322 e 173.364 (15 e 19 marzo 1919).

Resta ora da vedere quale sia il comportamento di tali composti nella mescolanza di gomma e zolfo durante la vulcanizzazione. Che essi siano dei catalizzatori nel senso stretto della parola, come è stato supposto da taluni, deve a nostro parere ritenersi escluso, essendo certo, per quanto diremo dopo, che essi subiscono modificazioni chimiche e non escono inalterati dal processo.

Il sig. A. Dubosc ha esposto una sua teoria [1], secondo la quale l'agente principale della accelerazione sarebbe l'acido solfocianico che si formerebbe da tutti questi composti. Questa ipotesi non può venir ammessa in linea generale, per ciò che diremo dopo ed anzitutto perchè anche composti non azotati come gli xantogenati sono acceleranti potenti; ma vedremo che derivati dell'acido isosolfocianico (senfoli) esercitano realmente una funzione preponderante in alcuni casi assai importanti.

La supposizione più frequentemente emessa, e che a prima vista sembra più plausibile, è che gli acceleranti siano sostanze capaci di formare polisolfuri collo zolfo aggiunto per la vulcanizzazione e che questi polisolfuri possano cedere lo zolfo ed alternativamente riprenderlo e così via. Questa ipotesi fu avanzata in forme diverse da Ostromisslenski [2], Kratz, Flower e Coolidge [3], e da Scott e Bedford [4].

Ostromisslenski suppone che le ammine formino collo zolfo dei trisolfuri o tioozonuri secondo l'equazione:

$$2\,R-NH_2 + 4\,S = R-NH-S-S-S-NH-R + H_2S.$$

Questa formazione è puramente ipotetica, non essendo dimostrata nè la formazione dell'idrogeno solforato, nè quella dei tioozonuri.

Kratz, Flower e Coolidge attribuiscono l'azione delle ammine alla formazione di composti:

$$R-\underset{\underset{S}{\|}}{NH_2}$$

che potrebbero cedere lo zolfo alla gomma e ricostituirsi alternativamente. Anche tali composti sono puramente ipotetici. Gli unici composti che avrebbero qualche analogia con questi sarebbero gli ossidi delle ammine terziarie grasso-aromatiche

$$Ar-\underset{\underset{O}{\|}}{NR_2}\ (^5),$$

(1) The India-Rubber World, *59*, 248 (1919).
(2) Giorn. Soc. Fis. Chim. Russa, *47*, 1892 (1915).
(3) Journ. Ind. Eng. Chem., *12*, 317 (1920).
(4) Journ. Ind. Eng. Chem. *12*, 31 (1920); The Rubber Age, 10 marzo 1921.
(5) È vero che, come mi fa osservare il prof. Angeli, alcune reazioni della fenil-

Assai più plausibile è la supposizione di Scott e Bedford, secondo i quali le ammine darebbero dei polisolfuri di ammonii sostituiti del tipo solito, i quali potrebbero alternativamente distruggersi e ricomporsi. La parte più importante dell'ultimo lavoro di Scott e Bedford consiste nella distinzione da essi fatta degli acceleranti in due categorie corrispondenti a quelle indicate da noi sopra in 1) e 3). Essi cioè distinguono:

« 1) acceleranti-polisolfuri del gruppo H_2S. A questi appartengono le basi che formano polisolfuri simili al solfuro giallo d'ammonio;

« 2) acceleranti-polisolfuri del gruppo $\equiv C - S - H$, come le tiouree, ditiocarbammati, tiourami, mercaptani o i disolfuri che si possono formare da essi per ossidazione o reazione con zolfo ».

Tale distinzione è perfettamente conforme ai fatti. È solo nella seconda categoria che si trovano gli acceleranti di massima potenza che potremo chiamare *ultraacceleranti*, capaci p. es. di dare vulcanizzazioni a temperatura ordinaria. Ad essi sono da aggiungere gli alchilxantogenati ed altri corpi di cui parleremo in seguito.

Fra i corpi di questo tipo Scott e Bedford citano i tiourami ed i loro disolfuri. In una Nota precedente (1) è stato dimostrato che uno di noi aveva scoperto le proprietà acceleranti di questi corpi in modo affatto indipendente dai chimici americani.

Le osservazioni e considerazioni esposte in quella Nota sono anzi assai più complete del brevissimo accenno di Scott e Bedford e soprattutto mettono in rilievo un fatto fondamentale, rimasto loro ignoto, o da essi trascurato, e cioè che i disolfuri degli alchil- o aril-tiourami non solo accelerano la vulcanizzazione, ma sono capaci di vulcanizzare senza zolfo estraneo, ciò che non fanno nè le tiouree, nè i ditiocarbammati, nè i xantogenati.

Finora la formazione di tali disolfuri era stata *ammessa* per spiegare la vulcanizzazione. Qui si dà per la prima volta la dimostrazione diretta e sperimentale che questi disolfuri sono effettivamente capaci di vulcanizzare la gomma cedendo il loro zolfo. Essi sono *autoacceleranti*.

Rammentiamo che i disolfuri di tiourami sostituiti si formano dai ditiocarbammati per ossidazione; p. es. dai ditiocarbammati di ammine per azione di iodio o di cloro con liberazione dell'ammina salificata sotto forma di iodidrato o di cloridrato (2). Ma essi possono formarsi altresì per ossidazione dei ditio-

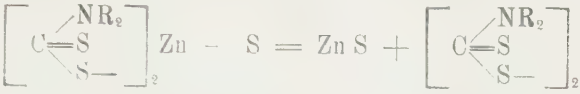
---

idrossilammina conducono ad ammettere che essa si comporti nella forma tautomera come l'ossido di anilina, ma è certo che le ammine primarie e secondarie hanno minore tendenza delle terziarie a dare derivati di questo genere, mentre appunto fra esse si trovano gli acceleranti più energici. G. B.

(1) E. Romani, questi Rendiconti, pag. 283.

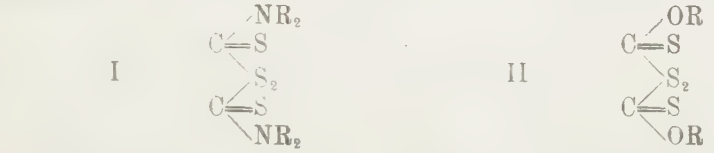
(2) Grodzki, Ber. *14*, 2756 (1881); ved. Braun, Ber. *35*, 817 (1902), *36*, 2259 (1903).

carbammati metallici o per azione su di essi di zolfo libero:



Questo è appunto il modo nel quale si comportano nella mescolanza comune zolfo gli alchil-e aril-ditiocarbammati di zinco e la ragione per la quale essi accelerano la vulcanizzazione in modo così eminente.

Anche gli alchilxantogenati di zinco possono per le medesime ragioni agire come ultraacceleranti, poichè anch'essi per ossidazione dànno facilmente dei disolfuri (I) perfettamente analogi a quelli dei tiurami (II), i cosidetti dixantogeni (1):

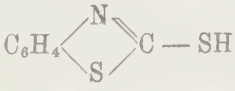


Da ciò risulta il perfetto parallelismo nell'azione delle due serie di composti.

Il comportamento dei xantogenati è interessante perchè anzitutto dimostra che l'azoto non è affatto necessario, e nemmeno sostanziale, nel processo di accelerazione, come invece gli autori prima citati hanno ritenuto, e conferma quanto si è detto prima circa la non necessità del carattere basico degli acceleranti.

Noi abbiamo poi dimostrato in modo preciso che anche l'azione degli acceleranti derivati della tiourea, o che con zolfo possono dar luogo a tiouree sostituite, è basato su un meccanismo perfettamente analogo.

Come uno di noi Romani) dimostrerà più diffusamente in un lavoro di prossima pubblicazione, riscaldando zolfo con monofenil- e con difeniltiourea in tubi chiusi a 260° si ottiene il mercaptobenzotiazolo



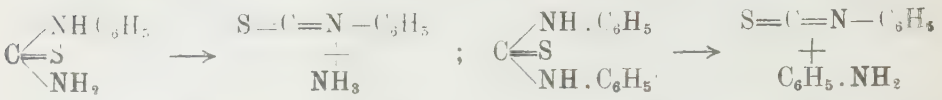
ottenuto per la prima volta da A. W. Hofmann (2). Questa sostanza era poi stata preparata da Jacobson e Frankenbaker (3), facendo agire in tubi chiusi lo zolfo sul fenilsenfolo:

(1) Dessins, Ann. chim. (3), *20*, 498 (1847); Debus, Lieb. Ann., *72*, 4 (1849); Schall, Chem. Centr., 1896, I, 588.

(2) Ber. *24*, 1400 (1891).

(3) Ber. *20*, 1789 (1887).

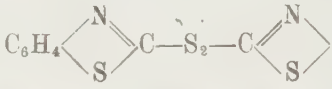
Evidentemente le reazioni da noi realizzate hanno luogo appunto perchè in un primo tempo si forma come prodotto intermediario il fenilsenfolo:



e il senfolo reagisce poi collo zolfo formando il mercaptotiazolo.

Questa sostanza, che è un solido cristallino leggermente colorato in giallo fondente a 179°, non ha da sola un potere accelerante marcato, ma in presenza di ossido di zinco è invece un ultraaccelerante di potenza paragonabile ai xantogenati e ditiocarbammati di zinco.

Ora è ben noto che per ossidazione del mercaptobenzotiazolo (Hofmann, Jacobson e Frankenbaker) si ottiene il relativo disolfuro:



Il disolfuro appena formato agisce a sua volta come tutti gli altri corpi del genere prima menzionati.

Noi abbiamo anche operato partendo dalla p.tolil-, dalla -naftil- e dalla pp.fenilen-tiourea ed abbiamo ottenuto per azione dello zolfo i mercaptotiazoli corrispondenti, di cui il primo e l'ultimo erano sconosciuti; essi sono dotati di analogo potere accelerante, per quanto un po' inferiore.

Questi composti si ottengono anche per riscaldamento dello zolfo con sostanze azotate aromatiche di costituzione svariate, attraverso a reazioni più o meno complicate. Per es. Rassow e Dohle [1] hanno ottenuto il mercaptobenzotiazolo, assieme a molte altre sostanze per riscaldamento della dimetilanilina con zolfo. Noi alla nostra volta abbiamo trovato che esso si forma con buon rendimento per azione dello zolfo sulla metilenanilina (anidroformaldeidanilina). È certo quindi che anche il potere accelerante di questa sostanza è dovuto alla medesima successione di reazioni.

L'azione accelerante di questi mercaptotiazoli, che hanno proprietà acide spiccate, interviene solo in presenza di ossidi metallici ed è dovuta, come nel caso degli xantogenati e ditiocarbammati, ai relativi sali, p. es. a quelli di zinco. È interessante che in questo caso, contrariamente a quanto accade per gli xantogenati e ditiocarbammati, anche i sali di altri metalli, come cadmio, piombo e mercurio, sono assai attivi.

Anche le tiouree trisostituite possono dar luogo a formazione di senfoli e quindi agiscono come acceleranti nello stesso modo. Per esempio:

[1] Journ. f. prakt. ch. (2), *93*, 183 (1916).

Invece le tiouree tetrasostituite, che non possono dare questa reazione, sono del tutto inattive, come noi abbiamo dimostrato sperimentalmente.

Il fatto che le proprietà acceleranti di certe sostanze azotate aromatiche non siano dovute ad un'azione primaria della sostanza stessa, ma a quelle di un prodotto intermedio formato per reazione fra la medesima e lo zolfo aggiunto per la vulcanizzazione è stato intravveduto da diversi sperimentatori. Così Peachey ha brevettato (1) l'impiego di una sostanza, o di un miscuglio che si ottiene fondendo la p.nitrosodimetilanilina con zolfo.

Più tardi la Goodyear Tire and Rubber C°. ha brevettato l'uso di sostanze o miscele che si ottengono fondendo con zolfo diverse sostanze azotate aromatiche come metilenanilina, feniltiouree, trifenilguanidina e simili (2). Nel testo del brevetto è detto appunto che anche quando dette sostanze vengono aggiunte inalterate alla mescolanza gomma-zolfo, esse non agiscono come tali, ma debbono prima reagire con zolfo per formare corpi che sono i veri acceleranti.

Nessuno di questi sperimentatori ha però isolato e descritto prodotti ben definiti da queste reazioni, e nemmeno spiega di qual natura essi dovrebbero essere. Ora è chiaro che tutte queste sostanze dànno luogo con zolfo, attraverso a reazioni più o meno complicate, analoghe a quelle di Rassow e Dohle, prima ad una tiourea sostituita, la quale dà poi le trasformazioni da noi descritte.

Un altro punto su cui gli autori precedenti non sono chiari è sull'azione dell'ossido di zinco sulla vulcanizzazione. Per quanto sia noto a tutti che un'azione energica degli acceleranti organici si ha solo in presenza di certi ossidi metallici, e principalmente di ossido di zinco, non si dà a questo fatto la dovuta importanza. Secondo Scott e Bedford la funzione dell'ossido di zinco consisterebbe semplicemente nel facilitare la scissione dei polisolfuri in zolfo colloidale ed ammine.

Da quanto noi abbiamo sopra detto, risulta invece che si tratta in prima linea della formazione dei sali di zinco degli acidi solforati descritti, i quali per azione dello zolfo libero perdono lo zinco sotto forma di solfuro e dànno luogo ai disolfuri organici che sono i veri acceleranti. La superiorità dell'ossido di zinco sugli altri ossidi metallici consiste evidentemente nelle diverse condizioni di stabilità e scomposizione dei relativi sali e solfuri.

Noi abbiamo così potuto riunire per i primi in uno schema comprensivo, razionale e sperimentalmente dimostrato l'azione accelerante di varie categorie importanti di sostanze solforate e non solforate organiche. Le sostanze attive sono: dixantogeni, disolfuri di tiourami, disolfuri di tiazoli. Tutte queste sostanze sono state isolate allo stato di purezza e la loro effi-

(1) Brit. Pat., 113.570 (1917).
(2) Brit. Pat. 130.857 (1919).

cacia è stata direttamente provata. Non intendiamo naturalmente di escludere che oltre a queste altri tipi di disolfuri attivi possano esistere.

Scott e Bedford ricordano che secondo J. Bloch (1) i persolfuri d'idrogeno possono vulcanizzare a freddo le soluzioni di gomma. Noi dobbiamo però dire che abbiamo tentato ripetutamente di riprodurre questa reazione in diverse condizioni, ma non vi siamo riusciti.

Dallo schema da noi tracciato resta fuori l'azione accelerante dei nitrosoderivati aromatici. Per la nitrosodimetilanilina ed omologhi si può ammettere la formazione del benzotiazolo, analogamente a quanto hanno osservato Rassow e Doble per la dimetilanilina, ma nulla di simile può dirsi per composti come il nitrosobenzolo ed il nitrosofenolo, per i quali bisogna probabilmente ricorrere all'azione dei nitrosogruppi sui doppi legami, scoperta da A. Angeli (2) appunto a proposito dell'azione del nitrosobenzolo sulla gomma. Questa pubblicazione sembra esser rimasta sconosciuta a Peachey.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les fonctions permutables.* Nota di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra (3).

1. Les transformations Ω de notre Note précédente (4) jouissent des propriétés suivantes:

1°. Elles font correspondre, à toute fonction $\lambda(y-x)$, une fonction $G(x, y)$.

2°. Elles sont linéaires en λ (distributives et continues).

3°. Elles conservent la composition.

J'ai déjà indiqué que l'on peut remplacer la condition 3° par la suivante: si $F(x, y)$ est la transformée de 1, $\overset{*}{F}^n$ est la transformée de $\overset{*}{1}^n$ (n entier) (5).

Nous reviendrons sur les transformations jouissant de ces propriétés; bornons nous à indiquer ici qu'il ne peut en exister plus d'une telle que, par exemple, $\Omega(1)$ ait une valeur assignée F. Dans ce cas, en effet, $\overset{*}{1}^n$ aura pour transformée F^n (d'après 3°); la valeur de la transformée de λ en ré-

(1) D. R. P.

(2) Questi Rendiconti.

(3) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(4) Rend. R. Acc. Lincei, fasc. 10, pag. 318. Lorsque nous aurons à citer cette Note dans la suite, nous la désignerons par [A].

(5) Bull. Soc. Math. de France. 1919.

sulte immédiatement si λ est un polynome, puis si λ est continue quelconque (d'après 2°) (1).

Parmi les transformations jouissant de ces propriétés, on doit citer, à côté de celles déjà examinées, celles qu'a définies M. Volterra et qui lui servent dans la réduction d'une fonction à la forme canonique (2).

Signalons aussi une généralisation: on peut dans 1°, remplacer l'ensemble des fonctions λ permutables avec l'unité par un autre groupe de fonctions permutables; en d'autres termes envisager des transformations ayant les propriétés 2° et 3° et faisant passer d'un groupe de fonctions permutables à un autre. Le passage à ce cas plus général est particulièrement simple pour les transformations mises sous la forme (4) de ma Note [A].

2. Reprenons une Ω du type considéré dans [A]. Elle peut se mettre sous la forme

$$G(x, y) = (\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{m})\,\overset{\bullet}{\lambda}\,(\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{n}), \tag{1}$$

m et n étant deux noyaux associés de Volterra, c'est-à-dire vérifiant

$$(\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{m})(\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{n}) = (\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{n})(\overset{\bullet}{1}{}^{o} + \overset{\bullet}{m}) = \overset{\bullet}{1}{}^{o}. \tag{2}$$

Cette transformation fait correspondre, au groupe U du cycle fermé, un groupe C de fonctions permutables constituant, comme on le voit sans peine, l'ensemble de *toutes* les fonctions permutables avec une quelconque d'entre elles. La transformation peut être dite régulière si $\Omega(1)$ est une fonction régulière (3).

Parmi les transformations précédentes, il convient de signaler celles, que nous nommerons ω, qui transforment le groupe U en lui-même; elles sont toutes régulières (4).

Il est clair que en général, deux transformations (1) différentes peuvent conduire au même groupe C: pour obtenir, à partir de l'une d'elles, toutes les Ω qui conduisent au groupe C, il suffit d'y effectuer, sur λ, toutes

(1) La condition d'existence d'une transformation de ce genre [jouissant des propriétés 1° à 3° et telle que $\Omega(1) = F$] peut être mise sous la forme suivante: si le polynome $a_0 \overset{\bullet}{1} + a_1 \overset{\bullet}{1}{}^{2} + \cdots + a_n \overset{\bullet}{1}{}^{n}$ est inférieur en module à ε, le polynome de composition $a_0 \overset{\bullet}{F} + a_1 \overset{\bullet}{F}{}^{2} + \cdots + a_n \overset{\bullet}{F}{}^{n}$, qui doit lui correspondre dans la transformation, est inférieur à $K\varepsilon$.

(2) Cf. Volterra, *Sulla teoria delle potenze, dei logaritmi, delle funzioni di composizione* (Atti Lincei, 1916, n. 7).

(3) F''_{xy} existe. Ce cas à déjà été caractérisé ([A], n.os 3, 4, 6).

(4) En effet, dans ce cas, le noyau $\Phi(\xi; x, y)$ ⟨cf. [A], équation (1)⟩ ne doit dépendre que de ξ et $y - x$; l'équation qui exprime qu'il conserve la composition se simplifie alors, on vérifie que la formule (2) de [A] (où l'on prend f fonction de la seule variable $y - x$) en donne la solution générale.

les ω. Ces diverses transformations sont en même temps régulières ou non : dans le premier cas, le groupe C sera dit régulier.

3. Envisageons maintenant une transformation

$$(1') \qquad G(x, y) = (\mathring{1}^{o} + \mathring{M})\,\mathring{\lambda}\,(\mathring{1}^{o} + \mathring{N}),$$

M et N (données) n'étant plus assujetties à vérifier l'équation

$$(2') \qquad (\mathring{1}^{o} + \mathring{M})(\mathring{1}^{o} + \mathring{N}) = (\mathring{1}^{o} + \mathring{N})(\mathring{1}^{o} + \mathring{M}) = \mathring{1}^{o}.$$

Cette transformation ne conserve plus la composition, mais les $G(x, y)$ forment un groupe de fonctions permutables si

$$(\mathring{1}^{o} + \mathring{N})(\mathring{1}^{o} + \mathring{M})$$

appartient au groupe U, en d'autres termes si

$$(3) \qquad N + M + \mathring{N}\mathring{M} = h(y - x)$$

(h arbitraire). Les types (1) et (1') se ramènent alors aisément l'un à l'autre.

La condition (3) entraine pour M et N des équations intégro-différentielles faciles à former [1]. Nommons Δ l'opération $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; on vérifie que

$$(4) \qquad \Delta(\mathring{M}\mathring{N}) = \overset{\circ}{\Delta M}\,\mathring{N} + \mathring{M}\,\overset{\circ}{\Delta N}$$

de sorte que (3) équivaut à

$$\Delta N + \Delta M + \overset{\circ}{\Delta N}\,\mathring{M} + \mathring{N}\,\overset{\circ}{\Delta M} = 0$$

ou

$$\overset{\circ}{\Delta N}(\mathring{1}^{o} + \mathring{M}) = -(\mathring{1}^{o} + \mathring{N})\,\overset{\circ}{\Delta M}.$$

D'où, en nommant

$$(\mathring{1}^{o} + \mathring{N})\,\mathring{f}\,(\mathring{1}^{o} + \mathring{M})$$

la valeur commune de ces rapports, résulte, en M et N, les relations intégro-différentielles

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) N = \quad f + \mathring{N}\mathring{f}$$

$$(\beta) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) M = -f - \mathring{f}\mathring{M}.$$

4. Admettons maintenant que f soit donnée. Soit M_0 et N_0 deux solutions de (α) et (β) telles que (2') soit vérifiée [2]. Il résulte de (3) que la

[1] Nous nous plaçons, pour le faire, dans le cas régulier; au cas général sera consacrée une Note suivante.

[2] On peut choisir l'une d'elles, M_0 par exemple, solution quelconque de (β); N_0 en résulte par la formule $N_0 = -M_0 + \mathring{M}_0^2 - \mathring{M}_0^3 + \cdots$.

solution générale de (α) sera telle que

$$(\mathring{1}^{o} + \mathring{N}) = (\mathring{1}^{o} + \mathring{h})(\mathring{1}^{o} + \mathring{N}_0);$$

d'où

$$N = h + N_0 + \mathring{h}\mathring{N}_0,$$

h étant fonction arbitraire de $y - x$. De même la solution générale de (β) sera

$$k + M_0 + \mathring{M}_0 \mathring{k} \qquad [k(y-x) \text{ arbitraire}].$$

On vérifiera que l'équation (α) coïncide avec l'équation intégro-différentielle que l'on peut déduire, pour n, de l'équation (8) de ma Note [A].

De ce fait et des expressions précédentes pour M et N, résulte bien aisément que, si l'on détermine f par la relation (2″) de [A], la formule (1′) [où M et N sont solutions quelconques de (α) et (β)] représente toutes les fonctions permutables avec $F(x, y)$.

Un mot sur la résolution des équations (α) et (β): elles sont de types traités par M. Volterra [1]. Nous indiquerons ici comment leur solution introduit la transcendante $\Phi(\xi; x, y)$ donnée par la formule (2) de [A]: on peut prendre, par exemple,

$$N(x, y) = \Phi(x; o, y) \qquad M(x, y) = \Phi(b - y, x, b) \ [2].$$

5. Toutes les fonctions permutables avec $F(x, y)$, données par la formule

$$G = (\mathring{1}^{o} + \mathring{M})\,\mathring{\lambda}\,(\mathring{1}^{o} + \mathring{N})$$

sont alors telles que

$$\Delta G = \overline{\Delta M}\,\mathring{\lambda} + \mathring{\lambda}\,\overline{\Delta N} + \overline{\Delta M}\,\mathring{\lambda}\,\mathring{N} + \mathring{M}\,\mathring{\lambda}\,\overline{\Delta N}$$

ou, d'après (α) et (β)

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) G = \mathring{G}\mathring{f} - \mathring{f}\mathring{G} \ [3].$$

[1] Cf. par exemple, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 163.

[2] Cette fonction $\Phi(\xi; x, y)$ est fort avantageuse à considérer, pour la simplicité de sa définition et ses nombreuses propriétés. Signalons ici, à côté des relations (4), (6′) et (7) du Mémoire déjà cité (Ann. Ec. Norm.) la relation analogue

$$\Psi_0(\tau; x, y) = f(x - \tau, y - \tau) + \int_x^y f(x - \tau, \zeta - \tau)\,\Psi_0(\tau; \zeta, y)\,d\zeta$$

pour Ψ_0 qui lui est simplement reliée [Ibid. n. 6]. Cette relation conduit à (β) pour $y =$ constante; (6′) conduit à (α) pour $x =$ constante; d'où les formules du texte.

[3] On encore

$$\mathring{F}^{-1}\mathring{G} = \mathring{G}\mathring{F}^{-1}.$$

C'est l'équation qui est à la base de la méthode de recherche des fonctions permutables de M. Volterra: il l'établit pour toute fonction du groupe de forme $G = \mathring{F}\mathring{G}' = \mathring{G}'\mathring{F}$; il en résulte qu'elle doit être générale, comme nous venons de le vérifier. Elle caractérise les fonctions du groupe.

Une remarque pour terminer. Nous avons vu que, à chaque f correspond une transformation ⟨dont le noyau est donné par la formule (2) de [A]⟩ conservant la composition et faisant passer, de U, à un groupe C de fonctions permutables. L'équation (γ) rend évident le fait, facile à vérifier directement, que le groupe C ne change point si l'on ajoute à f une fonction quelconque du groupe (et inversement) (1).

Cristallografia. — *Sulla forma cristallina della Trimetilfloretina* $C_6H_2O_3(CH_3)_3 . CO . CH(CH_3) . C_6H_4OH$ (2). Nota di Maria De Angelis (3), presentata dal Socio Artini.

La sostanza, preparata per la prima volta e descritta da Ciamician e Silber (4), mi fu affidata per lo studio dal prof. Körner.

P. fus. = 152°.

Sistema monoclino, classe prismatica:

$$a : b : c = 0.4505 : 1 : 0.3410$$
$$\beta = 71°.13'$$

Forme osservate:

$$\{010\}, \{001\}, \{110\}, \{210\}, \{\bar{2}01\}, \{\bar{1}11\}, \{\bar{2}11\}, \{\bar{2}12\}.$$

I cristalli ottenuti da miscela di etere ed alcool etilico presentano ordinariamente la semplice combinazione delle forme: $\{010\}, \{001\}, \{110\}, \{\bar{1}11\}$, alle quali qualche volta si aggiungono piccole faccette di $\{20\bar{1}\}$ (fig 1). Più ricchi sono ordinariamente i cristalli che si hanno da soluzioni in etere acetico; questi presentano di solito, come i precedenti, abito grossolanamente tabulare secondo $\{010\}$ (fig. 2) e per lo più sono formati dalla combinazione di tutte le forme osservate, meno la $\{\bar{2}11\}$ la quale fu trovata con due faccettine piccolissime in un unico cristallo.

Abbastanza frequenti sono i geminati nei quali l'uno dei due individui ricopre l'altro per rotazione di 180° intorno all'asse x. Alcuni di questi

(1) Cf. aussi la fin du n. 2.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale di Milano.

(3) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(4) G. Ciamician u. P. Silber, *Ueber die Constitution des Maclurins und Phloretins*. Berichte der Deutschen Chem. Ges. 28, p. 1393 (1895).

sono veri geminati di contatto secondo }001{, e potrebbero perfettamente esser definiti quali geminati secondo questa forma (fig. 3); sono quelli che si ottengono a preferenza dalle soluzioni etereo-alcooliche. Dalle soluzioni in etere acetico si hanno invece più spesso dei gruppi di due individui nei quali il piano di contatto è la }010{ (fig. 4).

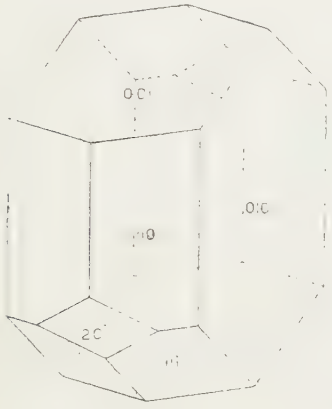


Fig. 1.

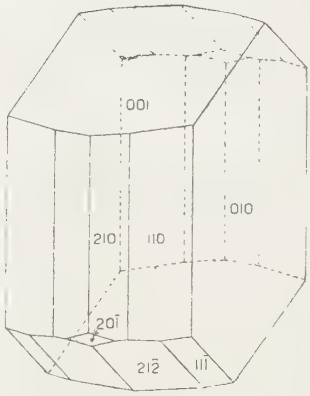


Fig. 2.

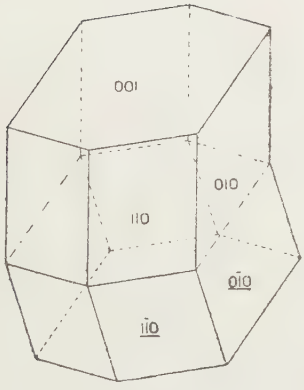


Fig. 3.

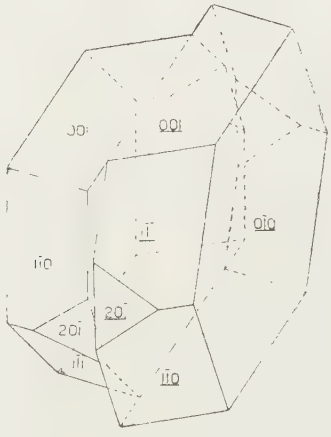


Fig. 4.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(110) . (010)	38	66°19′ — 67°44′	66°54′	*
(1̄10) . (1̄11)	13	60.25 — 61.35	61. 8	*
(1̄11) . (001)	16	45.51 — 46.20	46. 6	*
(110) . (1 1̄0)	17	45.19 — 47. 3	46. 5	46°12′
(110) . (210)	7	10. 6 — 11. 9	10.37	11. 4
(110) . (2 1̄0)	4	35.19 — 35.34	35.24	35. 8
(210) . (2 1̄0)	3	24.11 — 24.22	24.15	24. 5
(201) . (001)	7	70. 5 — 70.53	70.25	70.19
(110) . (001)	25	71.39 — 73.24	72.28	72.46
(210) . (001)	8	71. 5 — 71.43	71.33	71.38
(1̄10) . (201)	6	43. 6 — 44.20	43.40	43.56
(210) . (2̄01)	2	40.11 — 40.13	40.12	40. 2
(1̄11) . (010)	12	72.21 — 73. 1	72.42	72.47
(1̄11) . (110)	1	—	104.28	104.30 ½
(1̄11) . (201)	5	31.24 — 32. 5	31.41	31.34
(1̄11) . (1 1̄1)	5	34.12 — 34.46	34.30	34.26
(212) . (001)	10	44. 8 — 44.45	44.21	44.10
(212) . (2̄10)	3	63.57 — 64.10	64. 4	64.12
(212) . (010)	7	80.33 — 81.18	80.57	81.11 ½
(212) . (201)	6	27.57 — 28.20	28.10	28.10
(212) . (1̄10)	2	63.32 — 64.00	63.46	63.56
(212) . (1̄11)	3	8.14 — 8.18	8.16	8.24 ½
(212) . (2 1̄2)	3	17.15 — 18.00	17.37	17.37
(211) . (010)	2	77.57 — 78. 1	77.59	78. 1 ½
(211) . (201)	2	11.54 — 12. 1	11.57 ½	11.58 ½
(20 1̄) . (20 1̄)	1	—	38.34	39.21 ½
(110) . (1 1̄0)	2	34. 9 — 35.36	34.52 ½	34.28
(212) . (2 1̄2)	1	—	91.14	91.41
(1 1̄0) . (1 1̄0)	1	—	60. 8	58.54
(1 1̄1) . (1 1̄1)	1	—	97.54	97.52

Sfaldatura facile e perfetta secondo {010}.

Colore giallo citrino.

I piani degli A. O. sono normali a {010}; le bisettrici acute, negative, sono contenute nel piano di simmetria; quella per la luce gialla fa un angolo di 23° con l'asse x, nell'angolo β acuto.

Doppia rifrazione fortissima. Dispersione degli A. O. abbastanza forte: $\varrho < v$.

Sopra una lamina tagliata normalmente alla bisettrice acuta ho misurato:

$$2E_a = 63°.27' \text{ (Na)}.$$

La stessa lamina nella soluzione di Thoulet mi ha dato:

$$2H_a = 35°.36' \text{ (Na)}.$$

In una lamina di sfaldatura secondo {010} ho ottenuto, nello stesso liquido (l'angolo $2H_o$ è molto grande, e gli assi non emergono nell'olio):

$$2H_o = 131°.35' \text{ (Na)}.$$

Da questi dati si calcola:

$$2V_a = 37°.3\,{}^1/_2{}' \text{ (Na)}.$$

P. sp. = 1.306
P. M. = 316.16
V. = 242.08

$\chi = 5.3395$
$\psi = 11.8511$
$\omega = 4.0410$

Biologia. — *Ricerche biochimiche sul preparato 'centrale di rospo* (1). Nota di E. Sereni, presentata dal Corrisp. S. Baglioni (2).

I varî preparati dell'asse cerebro-spinale di Rana e di Bufo, ideati dal Baglioni (3), sono stati già utilizzati per varî sperimenti sulla fisiologia generale dei centri nervosi da diversi autori. Molti sono però i problemi ai quali il loro studio può portare qualche contributo, e fra questi non ultimi quelli relativi al metabolismo dei detti centri.

Ho eseguito queste ricerche sul preparato di Bufo, come il più completo. Ottenutolo con una tecnica identica a quella consigliata dal Baglioni,

(1) Queste ricerche sono state eseguite nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma, sotto la guida del prof. Baglioni, che qui vivamente ringrazio.

(2) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(3) Baglioni, Handbuch der biochemischen Arbeitsmethoden di E. Abderhalden, pp. 358-384. Zeitschrift f. allgmeine Physiologie, IV Bd. 1904, pp. 384-437.

lo deponevo in un cristallizzatore, su poca ovatta bagnata con soluzione fisiologica e con qualche goccia di H_2O_2. Dopo 15 minuti, durante il quale tempo erano di solito ricomparsi i riflessi, in un primo momento sospesi, lavavo l'asse cerebro-spinale in soluzione fisiologica e quindi lo ponevo in un apparecchio simile a quello usato dal Baglioni (1), previamente riempito di circa 350 cm³. del liquido, costituito da soluzione 0,8 % di NaCl bollita. Molta cura ponevo a che restassero immersi nel liquido solo i centri nervosi. Per l'ossigenazione del liquido, a differenza del Baglioni, che usava ossigeno, adoperai acqua ossigenata.

Nell'apparecchio il preparato era lasciato finchè se ne potevano ottenere movimenti riflessi; quindi l'asse cerebro-spinale era fissato per essere sottoposto all'esame istologico, mentre il liquido era analizzato chimicamente da varî punti di vista.

Delle alterazioni ritrovate nelle cellule dei midolli usati per le esperienze, è detto altrove. Qui riferirò brevemente i risultati di ordine fisiologico.

La durata della sopravvivenza fu assai varia; si aggirò di solito intorno alle 20 ore, a temperatura ambiente di stanza; come massimo notai in un caso $64^h 30'$.

L'uso dell'H_2O_2 per l'ossigenazione del liquido, finora tentato solo dal Baglioni, mi diede ottimi risultati. La quantità media adoperata per ogni preparato fu di 3 cm³. della soluzione della F.U. (al 3,6 %): non fu possibile stabilire più esattamente la quantità necessaria.

Nel liquido, dopo la permanenza del preparato, potei in tutti i casi constatare la presenza di CO_2 (con la prova di Pettenkofer all'acido rosolico e con quelle alla fenolftaleina): e questo può avvalorare l'ipotesi del Baglioni che suppone che il CO_2 abbia un ruolo importante nel rendere il liquido inadatto alla sopravvivenza dei centri.

Nelle prime ricerche mi riuscì di dimostrare nel liquido della albumina (con la prova di Heller e con l'acido tricloroacetico); essa apparve poi in quantità sempre minore fino a scomparire nelle ultime analisi: sicchè credo che la sua presenza non abbia alcuna importanza e debba riportarsi ad impurità, dovute all'imperfetto lavaggio, che la tecnica perfezionandosi via via, è riuscita infine ad eliminare.

Sempre potei dimostrare (col metodo di Soerensen modificato dal Settimi) la presenza di aminoacidi in quantità media pari a gr. 0,0200 per 100 cm³. di liquido e gr. 0,0685 in totale. Instituite alcune ricerche di controllo, nelle quali nell'apparecchio ponevo l'asse cerebro-spinale previamente ucciso in varia guisa (con pressioni, esposizione all'aria senza acqua ossigenata), le quantità medie di aminoacidi ritrovate furono di gr. 0,0122 per 100 cm³. e 0,0347 in totale; i quali risultati stanno a dimostrare una attiva aminogenesi, più intensa quasi del doppio nei preparati viventi.

Se questi furono i valori medî, i singoli risultati di ogni serie si pre-

(1) Baglioni, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIII, 1904, pp. 739-748.

sentarono assai variabili; da gr. 0,0098 a gr. 0,0280 i valori percentuali e da gr. 0,0378 a gr. 0,0980 i valori totali per la prima serie; da gr. 0,0087 a gr. 0,0154 i valori percentuali e da gr. 0,0114 a gr. 0,0539 i valori totali nelle ricerche di controllo. Questa grande variabilità, più che a fenomeni biologici, credo si debba riportare a fenomeni fisici di temperatura e di diffusione. I valori tendono infatti progressivamente a salire coll'avanzare della stagione, e quindi della temperatura; e d'altra parte, facilitando in un qualsiasi modo la diffusione, le quantità di aminoacidi dimostrabili aumentano rapidamente. Questo avviene, per esempio, per i preparati viventi agitandoli nel liquido, per quelli morti, spappolandoli; in ambedue i casi l'aumento è notevolissimo.

Dopo l'ebollizione, il liquido dimostrò sempre reazione intensamente alcalina e all'acido rosolico ed alla fenolftaleina. Nei liquidi bolliti gli aminoacidi apparvero costantemente diminuiti.

Dei risultati interessanti in merito alle conclusioni che se ne possono trarre mi diede la stricnina. Applicata sul rigonfiamento lombare del midollo appena isolato, non parve produrre alcun aumento della quantità degli aminoacidi; mentre mi sembrò esercitasse una lieve azione nel prolungare la vita del preparato, che fu in media, in questi casi, di 21^h, cioè di un'ora circa superiore alla media generale.

Applicata invece, sempre sul rigonfiamento lombare, ma solo quando la eccitabilità riflessa stava per scomparire, la stricnina mostrò una ben diversa efficacia. Essa fu in queste condizioni capace di prolungare di assai la vita del preparato; e di esaltarne la eccitabilità sicchè, mentre prima della sua applicazione, non si potevano più provocare che lievissimi movimenti delle dita, monolaterali, dopo, ridiventavano possibili delle contrazioni complete di tutto l'arto, bilaterali. Talvolta, esaurito l'effetto di una prima applicazione di stricnina, il preparato si mostrò capace di sentire gli effetti di una seconda.

È da notarsi che con queste applicazioni tardive, non ottenni mai i tetani caratteristici (che si presentavano invece regolarmente ed intensissimi nelle applicazioni precoci), ma solo contrazioni singole, dopo ciascuna delle quali si aveva un lungo periodo di ineccitabilità.

Questo modo di azione della stricnina, collegato alla presenza di aminoacidi nel liquido da una parte, dall'altra alla dimostrazione data dal Lussana [1], che alcuni aminoacidi esercitano sui centri nervosi un'azione depressiva che la stricnina neutralizza, mi sembra possa condurre ad ammettere che la morte, o meglio l'ineccitabilità del preparato del Baglioni sia in parte dovuta all'accumulo (facilitato dall'assenza del circolo), degli aminoacidi prodotti durante il metabolismo.

In correlazione con questo modo di vedere si possono spiegare varî fenomeni presentati dal preparato del Baglioni e da quelli affini.

[1] Lussana, Archivio di Fisiologia, X, 1912, pag. 345.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Foà fa omaggio del vol. VII del *Trattato di anatomia patologica per medici e studenti* da lui diretto, e che contiene il suo studio sull'*Apparato respiratorio.*

Il Presidente Volterra presenta il prof. Zeilon dell'Università di Upsala, che tenne nei locali dell'Accademia il giorno 2 corr. per il Seminario matematico una dotta conferenza; e il prof. Zeilon offre alcune sue pubblicazioni.

AFFARI DIVERSI

Il Socio Grassi informa la Classe del seguente discorso pronunciato dal Presidente d'Ovidio nella seduta della Classe di scienze morali, storiche e filologiche dell'8 maggio scorso.

« Si compie in questi giorni il quarantesimo anno da che il commendator Ernesto Mancini, auspice Quintino Sella, assunse nella nostra Accademia l'ufficio che oggi diciamo di Cancelliere. Quanti l'abbiam visto all'opera e abbiam potuto estimare l'intelligenza, l'abilità, lo zelo, l'amore, il garbo, la delicatezza squisita con che egli ha esercitato esso ufficio, non possiam tenerci dal manifestargliene oggi il nostro profondo compiacimento. E molti più saremmo se i tanti nostri predecessori che la morte ha rapiti potessero rifarsi vivi ed attestare le benemerenze di lui e l'affetto loro e la fiducia piena che in lui riposero. Se non corressero tempi davvero feroci per tutte le Accademie, e per la nostra in ispecie, se la nazione e il suo Governo non trascorressero un'ora tanto agitata, noi vorremmo ben altrimenti che con parole significare al professor Mancini la riconoscenza dell'Accademia; ma all'animo suo cortese non saranno indifferenti le parole sincere e cordiali, tra le quali ve n'è una d'augurio assai vivo, augurio non meno in pro di lui che in pro dell'Accademia, che per lunghi anni egli possa ancora rimanere nel nobile ufficio a cui ha dedicata tanta parte della sua vita intemerata ».

Su proposta del Socio on. Luzzatti, questo indirizzo venne firmato da tutti i Soci presenti.

Il Vicepresidente Volterra aggiunge cortesi parole di congratulazione e di augurio, e prega i Soci che non l'avessero ancor fatto, di firmare l'indirizzo.

CONCORSI A PREMI

A termini di quanto dispone lo Statuto ed il Regolamento, la Classe, riunitasi in Comitato segreto, procede alla elezione della Commissione che dovrà giudicare il concorso al premio Reale del 1921 per l'*Astronomia*. Risultano eletti a maggioranza di voti, i Soci: Cerulli, Levi-Civita, Di Legge, Somigliana e Corbino.

G. C.